

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Информационные системы в строительстве»

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Методические указания по выполнению контрольной работы
для магистрантов направления подготовки
«Информационные системы и технологии» (заочная форма)

Ростов-на-Дону

ДГТУ

2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
Математическая модель планирования эксперимента	4
Виды планов и их характеристика.....	8
Контрольные вопросы по теории	14
Задания контрольной работы	14
Разработка математической модели прикладной задачи в Excel на основе ОЦКП (пример выполнения)	17
Элементы автоматизации с использованием VBA+Excel.....	21
ЛИТЕРАТУРА	25

ВВЕДЕНИЕ

Эксперимент (опыт) – это совокупность операций, совершаемых над объектом, с целью получения информации о его свойствах. Теория планирования эксперимента тесно связана с многомерными статистическими методами. Эта теория включает математические методы планирования экспериментов, которые дают возможность управлять условиями проведения эксперимента с целью повышения его эффективности. Эксперименты, основывающиеся методах планирования экспериментов, принято называть *активными*. Эксперименты, которые ставятся для решения оптимизационных задач, называются *экстремальными*.

Цели планирования экспериментов:

- нахождение условий проведения экспериментов, при которых удастся получить достоверную информацию об исследуемом объекте с наименьшими затратами (при минимальном количестве опытов);
- представление информации в удобной форме для ее извлечения и обработки.

Задачи планирования экспериментов:

- построение математической модели изучаемого объекта, включающей показатели качества объекта, зависящие от параметров (факторов), для оценки его свойств;
- нахождение такой комбинации факторов, при которой достигаются экстремальные значения выбранных показателей качества;
- автоматизация решения задач управления экспериментом (планирования, оценки погрешностей, прогнозирования).

Методы и подходы к планируемым экспериментам достаточно хорошо разработаны в научно-прикладных исследованиях. В исследованиях используются различные вычислительные инструменты и инструменты анализа от стандартных математических и статистических пакетов общего назначения (MATHCAD, MATLAB, STATISTICA, STATGRAPHICS и др.) до специализированных авторских пакетов, как правило, ориентированных на выбранную предметную область.

Данное пособие поможет приобрести навыки использования моделей и методов планирования экспериментов при решении практических задач из профессиональной области.

Математическая модель планирования эксперимента

При планировании эксперимента, следуя кибернетическому подходу, исследуемый объект представляется «черным ящиком», входные параметры которого X_1, X_2, \dots, X_n – *факторы*, а выходной параметр (или параметры) y – *отклик*. Выходной параметр является искомым показателем качества исследуемого объекта.

Зависимость выходного параметра или выходных параметров, если их несколько, от входных выполняются либо с помощью экспериментов на моделях (математических аналитических, численных, имитационных и др.), либо путем натурных экспериментов.

В математической теории планирования экспериментов выходной параметр объекта представляется функцией от входных параметров, которая определяется в виде некоторой регрессионной зависимости

$$\hat{y} = F(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

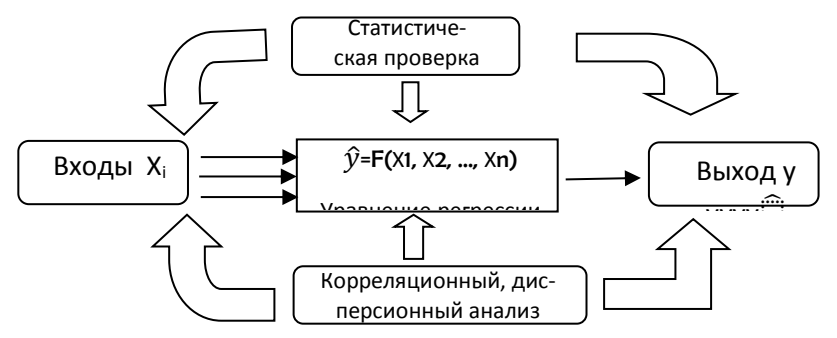


Рисунок 1

При этом для получения более полной и достоверной картины зависимости отклика от факторов регрессионный анализ дополняется статистическими исследованиями: корреляционным, дисперсионным анализом, статистической проверкой гипотез.

Для построения регрессионной модели используются планы (наборы значений входных параметров), которые позволяют с наименьшими затратами (при наименьшем количестве экспериментов) определить регрессионную зависимость и оценить ее значимость.

Рассмотрим основные понятия и теоретические положения теории планирования экспериментов.

Уровнями факторов X_i называется набор значений, которые этот фактор принимает и которые используются при проведении экспериментов. Для построения эффективной математической модели целесообразно предварительно провести анализ значимости факторов, их возможной коллинеарности, исключить малозначащие факторы.

Допустим известны диапазоны изменения факторов $[X_{imin}, X_{imax}]$, $i = \overline{1, n}$. Областью планирования или *факторным пространством* называется многомерный параллелепипед, ограниченный диапазонами изменения факторов.

Экспериментом, с точки зрения математической модели, называется такое сочетание значений различных факторов, которое соответствует условиям проведения опыта. Формально заданию условий эксперимента соответствует задание n -мерной точки $M^j(X_1^j, X_2^j, \dots, X_n^j)$ в факторном пространстве, координаты которой – значения факторов

$$X_i^j \in [X_{imin}, X_{imax}], i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

Обозначим количество точек в плане N , тогда $j = \overline{1, N}$.

Как правило, точки не выходят за пределы факторного пространства, исключение составляют композиционные планы, о которых будет говориться ниже. Совокупность всех точек эксперимента называется *планом эксперимента*.

Кодирование переменных и уравнение регрессии

Изначально значения факторов X_i^j рассматриваются в натуральном измерении, затем переходят к кодированным (безразмерным, приведенным) значениям факторов. Будем обозначать их строчными буквами x_i^j . Значения кодированных переменных для не композиционных планов изменяются в пределах от -1 до $+1$:

$$x_i^j \in [-1,1], i = \overline{1,n},$$

Формулы перехода к кодированным переменным имеют вид

$$x_i^j = \frac{x_i^j - X_{iavg}}{X_{iavg} - X_{imin}}, \quad X_{iavg} = (X_{imin} + X_{imax})/2, \quad (2)$$

Координаты X_i^j точек плана в натуральном измерении (обратный переход) вычисляются по формулам

$$X_i^j = (X_{iavg} - X_{imin})x_i^j + X_{iavg}, \quad (3)$$

где $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,N}$;

x_i^j — значение кодированного фактора x_i в j -ой точке плана.

Центром эксперимента называется точка, в которой все $x_i^j = 0$.

В качестве функции отклика (регрессионной модели) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от кодированных переменных наиболее часто используются *полиномиальные модели первой и второй степени*:

$$\hat{y} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \neq j \neq k}}^n b_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2, \quad (4)$$

где x_i — кодированные переменные полинома.

Введем дополнительные обозначения

$$x_{n+1} = x_1 x_2, \quad x_{n+2} = x_1 x_3, \dots,$$

Тогда полином (4) запишется в преобразованном линейном виде

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i, \quad (5)$$

где k — количество коэффициентов при неизвестных в полиноме.

Определение коэффициентов функции отклика

Расширенной матрицей плана в кодированных переменных называется матрица X размерности N на $(k+1)$, элементы которой x_i^j , где k — количество коэффициентов при неизвестных преобразованного уравнения регрессии (5),

$$X = \begin{bmatrix} x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_k^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^N & x_1^N & x_2^N & \cdots & x_k^N \end{bmatrix} \quad (6)$$

Основной матрицей плана называется матрица из n столбцов вида:

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^N & x_2^N & \cdots & x_n^N \end{bmatrix}$$

Обозначим Y – матрицу-столбец значений рассматриваемого показателя качества по результатам эксперимента в N точках, B – матрицу-столбец коэффициентов полинома (5):

$$Y^T = (y^{1exp}, y^{2exp}, \dots, y^{Nexp}),$$

$$B^T = (b_0, b_1, \dots, b_k),$$

где T означает операцию транспонирования матрицы.

Нахождение столбца коэффициентов полинома выполняется следующим образом:

$$Y = X \cdot B \quad \Rightarrow \quad B = (X^T X)^{-1} (X^T Y), \quad (7)$$

что соответствует формулам, полученным по методу наименьших квадратов.

Обозначим \hat{Y} – матрицу значений показателя качества в точках плана, найденных по уравнению регрессии,

$$\text{тогда } \hat{Y} = X \cdot B, \quad \text{где } \hat{Y}^T = (y^1, y^2, \dots, y^N).$$

Значения y^j , $j = \overline{1, N}$ выходного параметра в точках плана в случае ненасыщенного плана, т.е. при $N > k+1$ не совпадают с y^{jexp} . Качество полученной регрессионной модели оценивается различными методами: с помощью критерия Фишера, по средней ошибке аппроксимации и др. При расчете критерия Фишера используются остаточная и факторная дисперсии, отнесенные к числу степеней свободы. При расчете *средней ошибки аппроксимации* используется формула

$$COA = \frac{\sum_{i=1}^N |(y^i - y^{iexp}) / y^{iexp}|}{N}. \quad (8)$$

Считается ошибка аппроксимации приемлемой, если она меньше 0,08.

Виды планов и их характеристика

Планы различаются по своим характеристикам. Основными характеристиками являются *насыщенность*, *ротатабельность*, *ортогональность*, *нормированность*, *симметричность*, *композиционность*.

План называется *насыщенным*, если число экспериментальных точек N в нем совпадает с числом коэффициентов полинома $k+1$. Насыщенный план не позволяет усреднить ошибки эксперимента, если они есть, и определить их величины. Избыточное число опытов при $N > k+1$ позволяет это сделать.

План называется *ротатабельным*, если дисперсия функции отклика $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ одинакова на одинаковом расстоянии от центра плана, т.е. точки плана лежат на концентрических гиперсферах.

План называется *ортогональным*, если столбцы матрицы планирования (1.6) ортогональны

$$\sum_{U=1}^N x_i^U x_j^U = 0, \quad i, j = \overline{0, k}.$$

Для ортогонального плана матрица $C = X^T X$ является диагональной, поэтому коэффициенты полинома определяются независимо друг от друга.

План называется *нормированным*, если сумма квадратов элементов любого столбца равна числу опытов N :

$$\sum_{U=1}^N (x_i^U)^2 = N, \quad i = \overline{0, k}.$$

План называется *симметричным*, если сумма элементов любого столбца, кроме первого, равна 0:

$$\sum_{U=1}^N x_i^U = 0, \quad i = \overline{0, k}.$$

Если план позволяет определить коэффициенты полиномов только при первых степенях x_i и смешанных произведениях факторов, то такой план называется *планом первого порядка*.

План называется планом *второго порядка*, если он позволяет найти коэффициенты полиномов при x_i^2 . Для таких планов характерно, что факторы варьируются, как минимум, на двух уровнях.

План называется *композиционным*, если он включает дополнительные точки к планам первого порядка.

Полный факторный план

Формула, по которой рассчитывается число опытов при полном факторном эксперименте (ПФЭ), выглядит следующим образом:

$$N = p^n,$$

где N – число опытов;

n – число факторов;

p – число уровней варьирования факторов.

Если число уровней каждого фактора равно двум, то мы имеем полный факторный эксперимент типа ПФЭ 2^n

В планировании эксперимента используются кодированные значения факторов: +1 и -1. Условия эксперимента записываются в виде таблицы, где строки соответствуют различным опытам, а столбцы – значениям факторов. Такая таблица соответствует матрице планирования эксперимента (1.6). План ПФЭ обладает свойствами симметричности, нормированности, ортогональности, ротатабельности (для линейной модели).

На рисунке (Рисунок 2) приведена матрица расширенного плана ПФЭ 2^3 , учитывающая смешанные произведения (взаимодействия) факторов.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
U	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	Y
1	1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	Y_1
2	1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	Y_2
3	1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	Y_3
4	1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	Y_4
5	1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	Y_5
6	1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	Y_6
7	1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	Y_7
8	1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	Y_8
$\sum_{U=1}^N x_{iU}$	8	0	0	0	0	0	0	0	

Рисунок 2

Ортогональность плана означает, что матрица $X^T X$ диагональна, тогда коэффициенты полинома (5) определяются независимо друг от друга по формулам

$$b_i = (\sum_{j=1}^N y^{jexp} x_i^j) / N, i = \overline{0, k}. \quad (9)$$

План ПФЭ 2^n относится к планам первого порядка. Количество коэффициентов полинома от n факторов, содержащего свободный член, первые степени неизвестных и их смешанные произведения, равно $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$. Оно всегда совпадает с числом точек плана ПФЭ 2^n , поэтому этот план является насыщенным.

Так, при $n=3$ количество коэффициентов и число точек плана одинаково и равно 8. Регрессионный полином ПФЭ 2^3 для функции отклика имеет вид:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1 x_2 + b_5 x_1 x_3 + b_6 x_2 x_3 + b_7 x_1 x_2 x_3, \quad (10)$$

На практике при неколлинеарных факторах коэффициенты при смешанных произведениях близки к нулю, поэтому имеет смысл учитывать только линейные члены. В этом случае при $n > 2$ количество опытов превышает количество коэффициентов при первых степенях факторов. С одной стороны, это позволяет усреднить данные эксперимента y^{jexp} и оценить ошибки аппроксимации. С другой стороны, в ПФЭ при увеличении n разность между числом

опытов 2^n и числом коэффициентов $n+1$ линейной части, увеличивается, план становится избыточным по количеству опытов, возникает проблема уменьшения количества опытов.

Дробный факторный план

Для того, чтобы уменьшить число опытов, применяются дробные факторные планы.

Дробным факторным экспериментом называется система экспериментов, представляющих собой часть ПФЭ, позволяющая рассчитывать коэффициенты уравнения регрессии и сократить объем экспериментальных данных. Такие эксперименты обладают меньшей информативностью, но позволяют значительно сократить количество опытов. В ДФЭ количество экспериментальных точек $N = 2^{n-m}$, где m – показатель дробности ПФЭ. Если $m = 1$, то N в два раза меньше, чем в ПФЭ. Такие планы называются полурепликами.

Ортогональный центральный композиционный план

Если характер функции отклика нелинейный, то следует учитывать в уравнении регрессии слагаемые содержащие квадраты факторов. Для этого, как минимум, каждый фактор должен варьироваться на трех уровнях. Использование ПФЭ в этом случае приводит к неоправданному увеличению числа экспериментальных точек. Другой подход, основанный на композиционных планах, предложен Боксом и Уилсоном. Этот подход используется и при построении планов второго порядка.

Обозначим ОЦКП – центральный симметричный ортогональный композиционный план.

В ОЦКП входят:

- ядро – план ПФЭ с $N_0 = 2^n$ точками плана;
- n_0 – центральная точка плана;
- по две «звездные» точки для каждого фактора.

Общее количество точек в плане ОЦКП вычисляется по формуле:

$$N = 2^n + 2n + n_0, \quad (11)$$

где $n_0 = 1$.

В ОЦКП каждый кодированный фактор варьируется на пяти уровнях, т.е. x_i^j $(-\alpha, -1, 0, 1, \alpha)$, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, N}$, где α – плечо звездных точек.

Ортогональность плана обеспечивается преобразованием столбцов, соответствующих квадратам факторов, и соответствующим выбором значений координат звездных точек. Расчетные формулы для параметров, обеспечивающих ортогональность, имеют вид

$$a = \sqrt{2^n/N}, \quad \alpha = \sqrt{(\sqrt{N \cdot 2^n} - 2^n)/2}, \quad (12)$$

Вычисленные значения параметров приведены на рисунке Рисунок 3

n	2	3	4	5	6	7	8
α	1	1,215	1,414	1,596	1,761	1,909	2,045
a	0,667	0,73	0,8	0,86	0,91	0,946	0,968
N	9	15	25	43	77	143	273

Рисунок 3

На рисунке (Рисунок 4) приведена матрица плана ОЦКП при $n = 3$ в общем виде, учитывающая смешанные произведения (взаимодействия) факторов, их квадраты. На следующем рисунке представлена эта матрица, рассчитанная в Excel.

	U	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$\overline{x_4} = x_1^2 - a$	$\overline{x_5} = x_2^2 - a$	$\overline{x_6} = x_3^2 - a$	Y
Точки плана ПФЭ 2^3 ($M=2^n$ точек)	1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	-1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	Y_1
	2	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	Y_2
	3	+1	-1	+1	-1	-1	+1	-1	+1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	Y_3
	4	+1	+1	+1	-1	+1	-1	-1	-1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	Y_4
	5	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	Y_5
	6	+1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	-1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	Y_6
	7	+1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	-1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	Y_7
	8	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$1-a$	$1-a$	$1-a$	Y_8
Звездные точки ($2n$ точек)	9	+1	$-\alpha$	0	0	0	0	0	0	$\alpha^2 - a$	$-a$	$-a$	Y_9
	10	+1	$+\alpha$	0	0	0	0	0	0	$\alpha^2 - a$	$-a$	$-a$	Y_{10}
	11	+1	0	$-\alpha$	0	0	0	0	0	$-a$	$\alpha^2 - a$	$-a$	Y_{11}
	12	+1	0	$+\alpha$	0	0	0	0	0	$-a$	$\alpha^2 - a$	$-a$	Y_{12}
	13	+1	0	0	$-\alpha$	0	0	0	0	$-a$	$-a$	$\alpha^2 - a$	Y_{13}
	14	+1	0	0	$+\alpha$	0	0	0	0	$-a$	$-a$	$\alpha^2 - a$	Y_{14}
Нулевая точка	15	+1	0	0	0	0	0	0	0	$-a$	$-a$	$-a$	Y_{15}
$\sum_{i=1}^N x_{iU}$	-	N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
$\sum_{i=1}^N x_{iU}^2$	-	N	$2^n + 2\alpha^2$			2^n				$2^n(1-a)^2 + 2(\alpha^2 - a)^2 + a^2(2n-2) + n_0a^2$			

Рисунок 4

№	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0,27	0,27	0,27
2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	0,27	0,27	0,27
3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	0,27	0,27	0,27
4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27
5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27
6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	0,27	0,27	0,27
7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27
8	1	1	1	1	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27
9	1	-1,215	0	0	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73
10	1	1,215	0	0	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73
11	1	0	-1,215	0	0	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73
12	1	0	1,215	0	0	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73
13	1	0	0	-1,215	0	0	0	0	-0,73	-0,73	0,75
14	1	0	0	1,215	0	0	0	0	-0,73	-0,73	0,75
15	1	0	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73

Рисунок 5. Матрица плана ОЦКП при n=3, вычисленная в Excel

Вид линейризованного полинома функции отклика:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i, \quad (13)$$

где $k = C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n + n = 2^n + n - 1$, k – количество коэффициентов при неизвестных;

$$x_{n+1} = x_1 x_2, \quad x_{n+2} = x_1 x_3, \dots, \quad x_{k-1} = x_{n-1}^2 - a, \quad x_k = x_n^2 - a,$$

x_1, x_2, \dots, x_n – кодированные переменные;

Коэффициенты в (13) вычисляются по формулам:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y^{jexp}, \quad b_i = \left(\sum_{j=1}^N y^{jexp} x_i^j \right) / \left(\sum_{j=1}^N (x_i^j)^2 \right) \quad (14)$$

$$i = \overline{1, k},$$

где x_i^j – значение фактора x_i в j -ой точке плана;

y^{jexp} – экспериментальное значение критерия в j -ой точке плана.

При $n = 3$ число точек плана $N=15$, для звездных точек $\alpha=1,25$, эти точки незначительно выходят за пределы параллелепипеда факторного пространства, количество коэффициентов полинома равно 11. Регрессионный полином для функции отклика имеет вид

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1 x_2 + b_5 x_1 x_3 + b_6 x_2 x_3 + b_7 x_1 x_2 x_3 +$$

$$+ b_8 (x_1^2 - a) + b_9 (x_2^2 - a) + b_{10} (x_3^2 - a) \quad (15)$$

Контрольные вопросы по теории

1. Активные эксперименты. Цели и задачи планирования экспериментов.
2. Математическая модель планирования эксперимента.
3. Уровни факторов, факторное пространство. Эксперимент с точки зрения математической модели.
4. Кодирование переменных.
5. Регрессионная модель в виде полинома.
6. Расширенная и основная матрица плана.
7. Оценка качества регрессионной модели по средней ошибке аппроксимации.
8. Основные характеристики планов.
9. Полный факторный план ПФЭ 2^n , его матрица.
10. Регрессионный полином при ПФЭ 2^3 для функции отклика.
11. Дробный факторный план.
12. Ортогональный центральный композиционный план, его матрица.
13. Регрессионный полином при ОЦКП для функции отклика.

Задания контрольной работы

Постановка задачи прикладного характера

Исследуется зависимость мнения избирателя от характеристик электората и избирательных технологий. Будем считать что мнение избирателя определяется условно критерием y , а характеристики электората и избирательные технологии определяются комплексными факторами X_1, X_2, X_3 . Известны диапазоны изменения каждого фактора (минимальное и максимальное значения). Для построения регрессионной модели использовать Ортогональный центральный композиционный план (ОЦКП). В результате обработки статистических данных получены значения y^{exp} в точках этого плана (15 точек). Числовые данные в соответствии с вариантами приведены в таблицах. Требуется разработать математическую модель в виде регрессионной зависимости $\hat{y} = F(X_1, X_2, X_3)$, позволяющую оценивать эффективность используемых избирательных технологий и характеристик электората на мнение избирателей.

Замечание. Вместо поставленной задачи и числовых данных по вариантам можно сформулировать собственную задачу из интересующей предметной области и самостоятельно выбрать числовые данные к ней.

Таблица 1

Номер варианта	X1MIN	X1MAX	X2MIN	X2MAX	X3MIN	X3MAX
1	5	6	4	5	8	11
2	6	7	4	9	8	12
3	6	7	4	9	7	11
4	5	6	5	10	8	11
5	6	7	1	3	7	11
6	6	8	5	9	6	11
7	6	7	4	6	6	10
8	6	8	5	10	6	9
9	5	6	1	4	8	13
10	6	7	3	4	6	9
11	6	8	4	7	8	11
12	5	7	4	7	8	11
13	6	7	3	7	6	9
14	5	6	2	6	8	11
15	7	9	5	6	6	9
16	6	7	5	6	8	13
17	5	7	5	8	7	11
18	6	8	4	9	8	11
19	5	7	3	4	7	12
20	7	8	1	2	7	10
21	6	7	5	8	7	12
22	7	9	3	5	8	11
23	7	9	3	7	8	12
24	7	9	2	5	7	11
25	7	9	5	8	6	9

Таблица 2

Номер вари- анта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Номер экспе- римента	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp
1	9,54	9,04	9,44	7,34	8,43	10,50	7,24	6,51	7,29	9,17
2	12,15	12,56	9,65	10,34	8,72	13,53	12,86	9,84	10,88	11,55
3	13,24	7,84	10,24	7,99	8,67	10,84	8,83	7,34	8,96	8,91
4	12,88	12,61	12,02	9,55	9,51	14,06	13,16	10,12	10,53	14,24
5	11,60	9,34	11,65	10,25	6,48	11,99	7,86	8,11	11,26	9,23
6	15,28	10,73	11,00	9,23	8,78	14,96	14,96	9,94	15,44	11,70

7	17,00	10,09	12,36	7,18	13,07	13,58	10,40	12,09	11,44	12,22
8	13,58	16,29	10,55	10,47	13,61	13,32	10,85	11,01	15,29	11,72
9	13,40	10,93	9,16	8,50	9,47	9,26	7,26	10,06	9,67	9,38
10	9,71	12,98	13,32	9,44	11,11	11,32	12,24	13,20	12,08	12,36
11	11,90	11,18	10,55	11,76	9,80	13,54	13,38	9,19	10,94	13,18
12	14,03	11,24	9,19	9,41	12,09	11,83	11,46	8,78	11,11	10,99
13	10,20	11,77	9,49	8,83	6,54	13,38	11,29	10,35	10,66	10,94
14	7,97	11,94	13,85	10,72	11,83	14,83	12,80	13,77	16,21	12,06
15	8,58	10,41	11,51	11,42	10,29	12,68	10,40	9,01	12,02	10,59
Номер вари- анта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Номер экспе- римента	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp
1	8,31	8,29	10,69	6,50	8,49	6,21	10,29	7,66	7,56	7,15
2	10,00	9,54	9,60	10,76	11,46	10,71	12,97	10,03	9,86	8,76
3	6,98	7,40	11,60	8,19	9,12	7,34	11,15	10,77	6,81	9,64
4	9,32	10,79	12,14	10,39	11,31	11,32	13,69	11,88	11,71	8,00
5	14,50	12,56	11,78	7,57	12,94	11,32	10,13	8,04	10,16	8,59
6	14,46	17,33	16,22	13,54	12,15	13,00	11,44	10,09	10,65	10,49
7	13,82	9,95	11,80	12,57	12,55	8,54	11,50	10,91	11,42	9,35
8	14,82	11,90	19,14	12,67	10,89	11,28	15,77	11,48	14,04	12,07
9	7,01	9,09	13,71	8,68	6,76	7,26	12,55	9,91	6,92	9,43
10	9,53	12,80	10,53	10,94	10,59	8,57	13,90	10,51	12,05	7,93
11	10,68	9,65	13,30	8,86	10,99	8,76	11,12	8,72	10,99	7,51
12	13,07	11,97	11,00	8,59	10,44	11,07	15,09	8,45	13,00	10,46
13	9,22	9,33	9,38	7,66	11,18	9,43	12,76	9,42	9,02	8,35
14	10,62	9,83	10,80	12,50	10,47	9,58	11,38	12,24	13,73	8,96
15	9,24	8,40	14,07	10,52	10,63	10,22	10,51	10,45	11,68	9,11
Номер вари- анта	21	22	23	24	25					
Номер экспе- римента	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp	Yexp					
1	9,48	6,97	6,54	7,62	8,46					
2	10,75	9,36	9,22	10,41	11,57					
3	9,70	9,52	8,78	8,63	8,73					
4	12,70	10,85	7,63	14,18	10,96					

5	11,01	12,29	12,29	8,46	11,64					
6	12,56	11,65	11,56	9,94	14,10					
7	10,23	9,57	11,23	12,68	13,80					
8	14,59	10,63	11,64	13,17	16,93					
9	10,12	8,21	6,97	9,25	10,45					
10	13,97	13,97	12,95	10,63	12,98					
11	9,63	7,76	7,45	11,71	10,32					
12	11,89	12,76	11,21	14,49	12,76					
13	10,20	11,77	9,49	8,83	6,54					
14	7,97	11,94	13,85	10,72	11,83					
15	8,58	10,41	11,51	11,42	10,29					

Разработка математической модели прикладной задачи в Excel на основе ОЦКП (пример выполнения)

Данные варианта вставим на лист рабочей книги. Рассчитаем средние значения по формулам $X_{iavg} = (X_{imin} + X_{imax})/2$ (Рисунок 6). Для удобства в дальнейших расчетах можно дать имена (alf, a, N, Ncoef) ячейкам в соответствии со значениями параметров.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Yexp									
2	5,397447									
3	7,630355									
4	5,508893									
5	7,6002									
6	6,115107									
7	7,116865									
8	6,438498									
9	8,507912									
10	5,824821									
11	7,161622									
12	6,215063				alf=	1,215				
13	7,122938				a=	0,73				
14	7,361126				N=	15				
15	7,095445				Ncoef=	10				
16	6,747072									
17			Номер							
18			Варианта	X1MIN	X1MAX	X2MIN	X2MAX	X3MIN	X3MAX	
19			0	5	6	4	5	8	11	
20				X1AVG		X2AVG		X3AVG		
21				5,5		4,5		9,5		

Рисунок 6

Сформируем на листе матрицу основного плана ОЦКП (Рисунок 7) в кодированных переменных и рассчитаем матрицу плана в натуральных переменных, используя формулы (3)

$$X_i^j = (X_{iavg} - X_{imin})x_i^j + X_{iavg}.$$

Значения их этой матрицы должны использоваться при проведении экспериментов для получения столбца значений Y_{exp} . В учебном примере эти значения уже заданы.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
22											
23			КОДИРОВАННЫЕ ЗН ФАКТОРОВ				НАТУРАЛЬНЫЕ ЗН ФАКТОРОВ				
24	Номер эксп		x1	x2	x3		X1	X2	X3		Yexp
25	1		-1	-1	-1		5	4	8		5,397447
26	2		1	-1	-1		6	4	8		7,630355
27	3		-1	1	-1		5	5	8		5,508893
28	4		1	1	-1		6	5	8		7,6002
29	5		-1	-1	1		5	4	11		6,115107
30	6		1	-1	1		6	4	11		7,116865
31	7		-1	1	1		5	5	11		6,438498
32	8		1	1	1		6	5	11		8,507912
33	9		-1,215	0	0		4,8925	4,5	9,5		5,824821
34	10		1,215	0	0		6,1075	4,5	9,5		7,161622
35	11		0	-1,215	0		5,5	3,8925	9,5		6,215063
36	12		0	1,215	0		5,5	5,1075	9,5		7,122938
37	13		0	0	-1,215		5,5	4,5	7,6775		7,361126
38	14		0	0	1,215		5,5	4,5	11,3225		7,095445
39	15		0	0	0		5,5	4,5	9,5		6,747072
40											

Рисунок 7

Сформируем на листе расширенную матрицу плана (Рисунок 8), представленную в общем виде (Рисунок 4), справа припишем столбец значений Y_{exp} .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
42						x1x2	x1x3	x2x3	x1x2x3	x1^2-a	x2^2-a	x3^2-a	
43	номер эксп	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10	Yexp
44	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	0,27	0,27	0,27	5,397447
45	2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	0,27	0,27	0,27	7,630355
46	3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	0,27	0,27	0,27	5,508893
47	4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	7,6002
48	5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0,27	0,27	0,27	6,115107
49	6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	0,27	0,27	0,27	7,116865
50	7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	0,27	0,27	0,27	6,438498
51	8	1	1	1	1	1	1	1	1	0,27	0,27	0,27	8,507912
52	9	1	-1,215	0	0	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73	5,824821
53	10	1	1,215	0	0	0	0	0	0	0,75	-0,73	-0,73	7,161622
54	11	1	0	-1,215	0	0	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73	6,215063
55	12	1	0	1,215	0	0	0	0	0	-0,73	0,75	-0,73	7,122938
56	13	1	0	0	-1,215	0	0	0	0	-0,73	-0,73	0,75	7,361126
57	14	1	0	0	1,215	0	0	0	0	-0,73	-0,73	0,75	7,095445
58	15	1	0	0	0	0	0	0	0	-0,73	-0,73	-0,73	6,747072

Рисунок 8

Далее следует вычислить коэффициенты полинома регрессии (13), используя формулы (14). Для этого предварительно рассчитаем в ячейках [B59:L59] суммы квадратов значений соответствующих столбцов. На рисунке (Рисунок 9) показан фрагмент таблицы с формулами.

	A	B	C	D	E	F	G
42						x1x2	x1x3
43	номер эксп	x0	x1	x2	x3	x4	x5
44	1	1	-1	-1	-1	=C44*D44	=C44*E44
45	2	1	1	-1	-1	=C45*D45	=C45*E45
46	3	1	-1	1	-1	=C46*D46	=C46*E46
47	4	1	1	1	-1	=C47*D47	=C47*E47
48	5	1	-1	-1	1	=C48*D48	=C48*E48
49	6	1	1	-1	1	=C49*D49	=C49*E49
50	7	1	-1	1	1	=C50*D50	=C50*E50
51	8	1	1	1	1	=C51*D51	=C51*E51
52	9	1	=-alf	0	0	=C52*D52	=C52*E52
53	10	1	=alf	0	0	=C53*D53	=C53*E53
54	11	1	0	=-alf	0	=C54*D54	=C54*E54
55	12	1	0	=alf	0	=C55*D55	=C55*E55
56	13	1	0	0	=-alf	=C56*D56	=C56*E56
57	14	1	0	0	=alf	=C57*D57	=C57*E57
58	15	1	0	0	0	=C58*D58	=C58*E58
59	суммкв	=СУММКВ(B44:B58)	=СУММКВ(C44:C58)	=СУММКВ(D44:D58)	=СУММКВ(E44:E58)	=СУММКВ(F44:F58)	=СУММКВ(G44:G58)

Рисунок 9

Для расчета коэффициентов по формулам (14)

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N y^{jexp}, \quad b_i = (\sum_{j=1}^N y^{jexp} x_i^j) / (\sum_{j=1}^N (x_i^j)^2)$$

Добавим к таблице [A42:M59] дополнительные столбцы L-Y, как показано на рисунках (Рисунок 10, Рисунок 11)

	A	B	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
40																
41																
42			x3^2-a													
43	номер эксп	x0	x10	Уexp	x0Y	x1Y	x2Y	x3Y	x4Y	x5Y	x6Y	x7Y	x8Y	x9Y	x10Y	Yregr
44	1	1	0,27	5,40	5,3974473	-5,397447	-5,39745	-5,39745	5,397447	5,397447	5,397447	-5,39745	1,457311	1,4573108	1,4573108	5,56
45	2	1	0,27	7,63	7,6303547	7,630355	-7,63035	-7,63035	-7,63035	-7,63035	7,630355	2,060196	2,0601958	2,0601958	7,59	
46	3	1	0,27	5,51	5,5088931	-5,508893	5,508893	-5,50889	-5,50889	5,508893	-5,50889	5,508893	1,487401	1,4874011	1,4874011	5,76
47	4	1	0,27	7,60	7,6001996	7,6002	7,6002	-7,6002	7,6002	-7,6002	-7,6002	-7,6002	2,052054	2,0520539	2,0520539	7,64
48	5	1	0,27	6,12	6,1151069	-6,115107	-6,11511	6,115107	6,115107	-6,11511	-6,11511	6,115107	1,651079	1,6510789	1,6510789	6,08
49	6	1	0,27	7,12	7,1168649	7,116865	-7,11686	7,116865	-7,11686	7,116865	-7,11686	-7,11686	1,921554	1,9215535	1,9215535	6,88
50	7	1	0,27	6,44	6,4384985	-6,438498	6,438498	6,438498	-6,4385	-6,4385	6,438498	-6,4385	1,738395	1,7383946	1,7383946	6,49
51	8	1	0,27	8,51	8,5079118	8,507912	8,507912	8,507912	8,507912	8,507912	8,507912	2,297136	2,2971362	2,2971362	2,2971362	8,36
52	9	1	-0,73	5,82	5,8248207	-7,077157	0	0	0	0	0	0	4,346627	-4,252119	-4,252119	5,48
53	10	1	-0,73	7,16	7,1616223	8,701371	0	0	0	0	0	0	5,344182	-5,227984	-5,227984	7,48
54	11	1	-0,73	6,22	6,2150634	0	-7,5513	0	0	0	0	0	-4,536996	4,6378357	-4,536996	6,33
55	12	1	-0,73	7,12	7,1229377	0	8,654369	0	0	0	0	0	-5,199745	5,3153142	-5,199745	6,98
56	13	1	0,75	7,36	7,3611263	0	0	-8,94377	0	0	0	0	-5,373622	-5,373622	5,4930565	7,02
57	14	1	0,75	7,10	7,0954454	0	0	8,620966	0	0	0	0	-5,179675	-5,179675	5,2947988	7,41
58	15	1	-0,73	6,75	6,7470717	0	0	0	0	0	0	0	-4,925362	-4,925362	-4,925362	6,77
59	суммкв	15	4,361404		6,79	0,82	0,26	0,16	0,12	-0,16	0,20	0,15	-0,20	-0,08	0,30	
60					v0	v1	v2	v3	v4	v5	v6	v7	v8	v9	v10	
61																

Рисунок 10

На рисунке (Рисунок 11) показан фрагмент таблицы с формулами, часть столбцов скрыты. Для расчета Уexp используется формула (13),

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i,$$

которая для ячейки [Y44] приобретает вид

$$= \$N\$59*B44 + \$O\$59*C44 + \$P\$59*D44 + \$Q\$59*E44 + \$R\$59*F44 + \$S\$59*G44 + \$T\$59*H44 + \$U\$59*I44 + \$V\$59*J44 + \$W\$59*K44 + \$X\$59*L44$$

Y44								= \$N\$59*B44+\$O\$59*C44+\$P\$59*D44+\$Q\$59*E44+\$R\$59*F44+\$S\$59*G44+\$T\$59*H44+\$U\$59*I44+\$V\$59*J44+\$W\$59*K44+\$X\$59*L44							
	L	M	N	O	V	W	X	Y							
42	x3^2-a														
43	x10	Yexp	x0Y	x1Y	x8Y	x9Y	x10Y	Yregr							
44	=1-a	=K25	=B44*\$M44	=C44*\$M44	=J44*\$M44	=K44*\$M44	=L44*\$M44	= \$N\$59*B44+\$O\$59*							
45	=1-a	=K26	=B45*\$M45	=C45*\$M45	=J45*\$M45	=K45*\$M45	=L45*\$M45	= \$N\$59*B45+\$O\$59*							
46	=1-a	=K27	=B46*\$M46	=C46*\$M46	=J46*\$M46	=K46*\$M46	=L46*\$M46	= \$N\$59*B46+\$O\$59*							
47	=1-a	=K28	=B47*\$M47	=C47*\$M47	=J47*\$M47	=K47*\$M47	=L47*\$M47	= \$N\$59*B47+\$O\$59*							
48	=1-a	=K29	=B48*\$M48	=C48*\$M48	=J48*\$M48	=K48*\$M48	=L48*\$M48	= \$N\$59*B48+\$O\$59*							
49	=1-a	=K30	=B49*\$M49	=C49*\$M49	=J49*\$M49	=K49*\$M49	=L49*\$M49	= \$N\$59*B49+\$O\$59*							
50	=1-a	=K31	=B50*\$M50	=C50*\$M50	=J50*\$M50	=K50*\$M50	=L50*\$M50	= \$N\$59*B50+\$O\$59*							
51	=1-a	=K32	=B51*\$M51	=C51*\$M51	=J51*\$M51	=K51*\$M51	=L51*\$M51	= \$N\$59*B51+\$O\$59*							
52	=a	=K33	=B52*\$M52	=C52*\$M52	=J52*\$M52	=K52*\$M52	=L52*\$M52	= \$N\$59*B52+\$O\$59*							
53	=a	=K34	=B53*\$M53	=C53*\$M53	=J53*\$M53	=K53*\$M53	=L53*\$M53	= \$N\$59*B53+\$O\$59*							
54	=a	=K35	=B54*\$M54	=C54*\$M54	=J54*\$M54	=K54*\$M54	=L54*\$M54	= \$N\$59*B54+\$O\$59*							
55	=a	=K36	=B55*\$M55	=C55*\$M55	=J55*\$M55	=K55*\$M55	=L55*\$M55	= \$N\$59*B55+\$O\$59*							
56	=alf^2-a	=K37	=B56*\$M56	=C56*\$M56	=J56*\$M56	=K56*\$M56	=L56*\$M56	= \$N\$59*B56+\$O\$59*							
57	=alf^2-a	=K38	=B57*\$M57	=C57*\$M57	=J57*\$M57	=K57*\$M57	=L57*\$M57	= \$N\$59*B57+\$O\$59*							
58	=a	=K39	=B58*\$M58	=C58*\$M58	=J58*\$M58	=K58*\$M58	=L58*\$M58	= \$N\$59*B58+\$O\$59*							
59	=CYMMKB(L44:L58)		=CYMM(N44:N58)/B59	=CYMM(O44:O58)/C59	=CYMM(V44:V58)/J59	=CYMM(W44:W58)/K59	=CYMM(X44:X58)/L59								
60			B0	B1	B8	B9	B10								

Рисунок 11

В результате расчетов получен следующий регрессионный полином в кодированных переменных

$$\hat{y} = 6,79 + 0,82x_1 + 0,26x_2 + 0,16x_3 + 0,12x_1x_2 - 0,16x_1x_3 + 0,20x_2x_3 + 0,15x_1x_2x_3 - 0,20(x_1^2 - 0,73) - 0,08(x_2^2 - 0,73) + 0,3(x_3^2 - 0,73) .$$

Оценим качество регрессионной модели по средней ошибке аппроксимации, определяемой по формуле (8)

$$COA = \frac{\sum_{i=1}^N |(y^i - y^{iexp}) / y^{iexp}|}{N} .$$

На рисунках 12 показаны результаты расчетов COA=0,026 и расчетные формулы.

	J	K	L	M	22	K	L	M
22								
23		Yexp	Yregr	(Yexp-Yregr)/Yregr	23	Yexp	Yregr	(Yexp-Yregr)/Yregr
24		5,40	5,56	0,029831803	24	5,39744733581406	=Y44	=ABS((K24-L24)/L24)
25		7,63	7,59	0,004718238	25	7,63035467948096	=Y45	=ABS((K25-L25)/L25)
26		5,51	5,76	0,042808854	26	5,50889307715302	=Y46	=ABS((K26-L26)/L26)
27		7,60	7,64	0,005831048	27	7,60019956477171	=Y47	=ABS((K27-L27)/L27)
28		6,12	6,08	0,005022611	28	6,11510694363135	=Y48	=ABS((K28-L28)/L28)
29		7,12	6,88	0,033751117	29	7,11686492845676	=Y49	=ABS((K29-L29)/L29)
30		6,44	6,49	0,007682928	30	6,43849849518452	=Y50	=ABS((K30-L30)/L30)
31		8,51	8,36	0,018184612	31	8,50791183291975	=Y51	=ABS((K31-L31)/L31)
32		5,82	5,48	0,063016535	32	5,82482066450504	=Y52	=ABS((K32-L32)/L32)
33		7,16	7,48	0,042651176	33	7,1616223144025	=Y53	=ABS((K33-L33)/L33)
34		6,22	6,33	0,018806485	34	6,21506341208052	=Y54	=ABS((K34-L34)/L34)
35		7,12	6,98	0,020867543	35	7,12293774561409	=Y55	=ABS((K35-L35)/L35)
36		7,36	7,02	0,047994518	36	7,36112628030689	=Y56	=ABS((K36-L36)/L36)
37		7,10	7,41	0,041846638	37	7,09544543526497	=Y57	=ABS((K37-L37)/L37)
38		6,75	6,77	0,003535306	38	6,74707165870027	=Y58	=ABS((K38-L38)/L38)
39				0,025769961	39			=CYMM(M24:M38)/N
40				COA	40			COA
41								

Рисунок 12

Элементы автоматизации с использованием VBA+Excel

Добавим в документ, используя средства VBA, форму для прогнозирования значения показателя в зависимости от введенных значений факторов.

Используя вкладку (Рисунок 13) «РАЗРАБОТЧИК», вставить элемент ActiveX «Кнопка» с заголовком «Прогнозирование» на рабочий лист. В моем случае название листа PLExp_00. Это имя будет использоваться в дальнейшем.

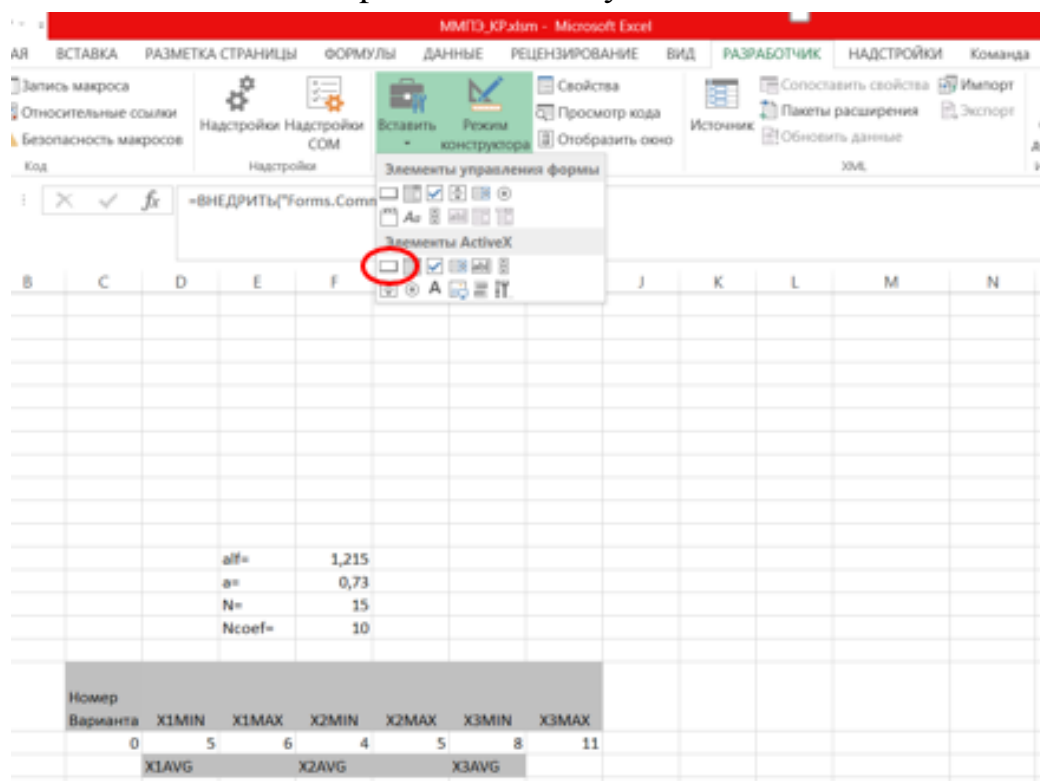


Рисунок 13

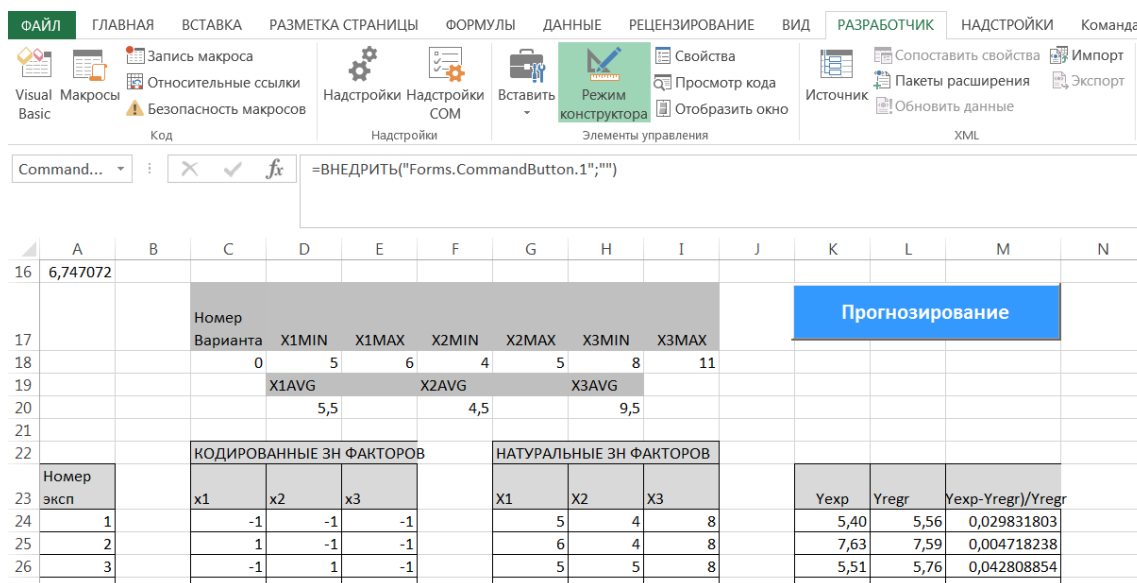


Рисунок 14

В режиме конструктора (двойной щелчок по кнопке) (Рисунок 14) настроить ее свойства в окне Properties (изменить заголовок на «Прогнозирование») и написать процедуру обработки события (Рисунок 15): по нажатию кнопки вызывается форма FormProgn, создание которой описано ниже.

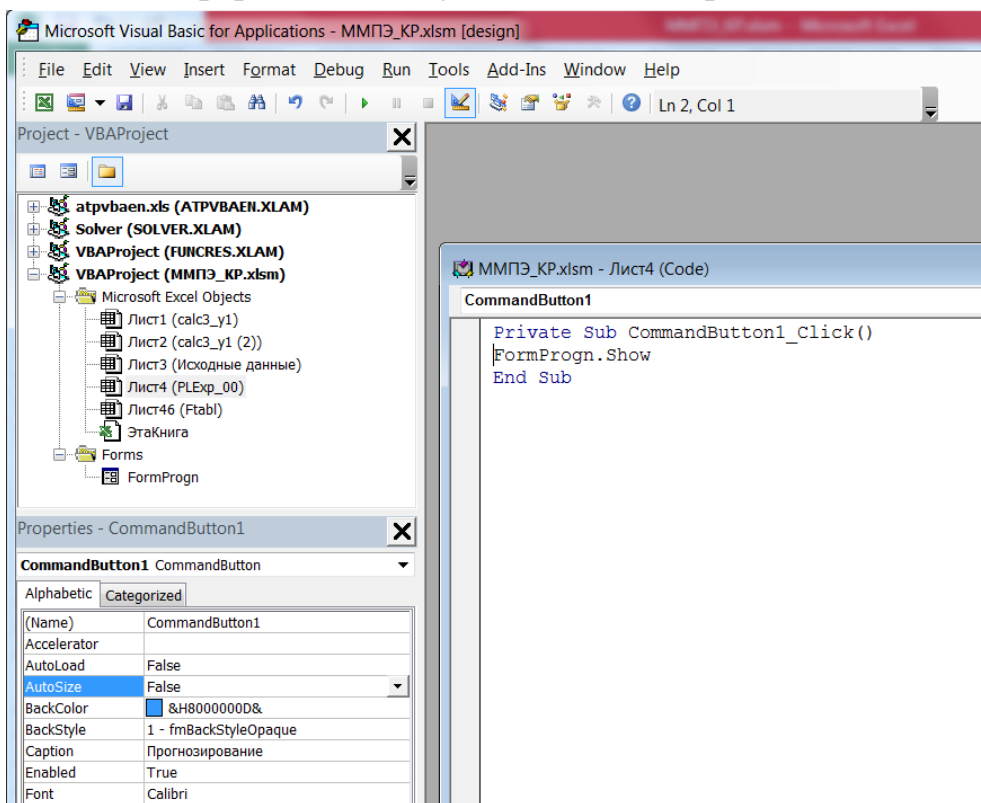


Рисунок 15

В редакторе VBA (переход ALT+F11 или с вкладки РАЗРАБОТЧИК) создать форму FormProgn (Insert→UserForm). Разместить на ней объекты (TextBox, CommandButton, Label) с панели Toolbox, как показано (Рисунок 16).

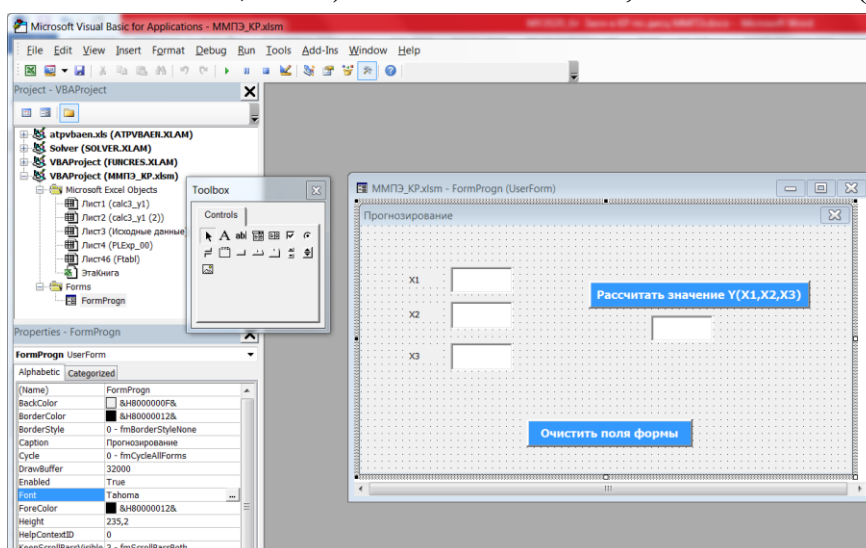


Рисунок 16

Настроить свойства объектов, используя панель свойств Properties в левом нижнем углу. Свойство Name для каждого элемента будет использоваться в дальнейшем в коде при описании процедур обработки событий.

В модуле формы FormProgn (окно кода формы вызывается двойным щелчком по форме или кнопкой View Code в окне проектов Project) написать две процедуры обработки событий, соответствующие нажатию командных кнопок на форме.

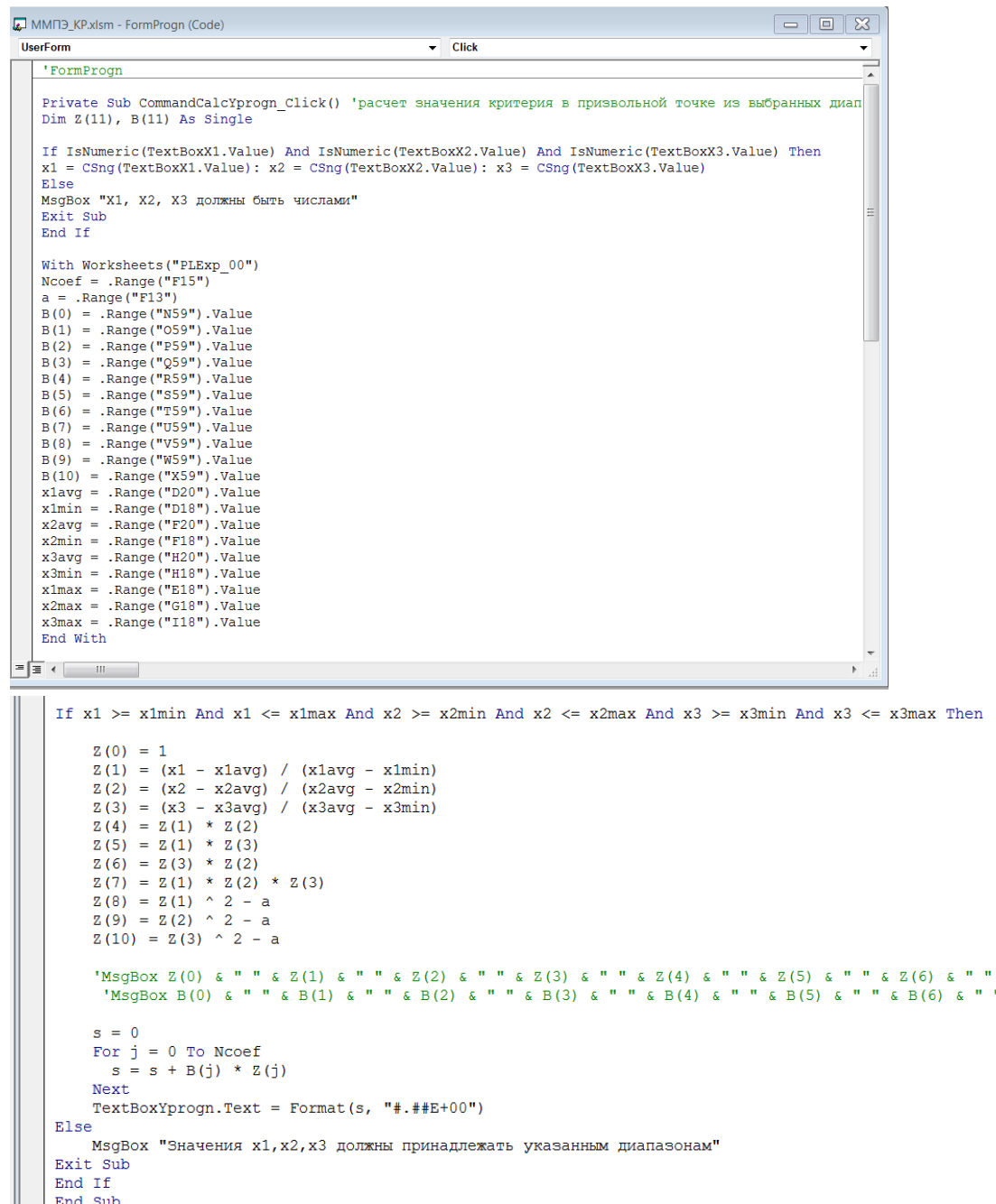


Рисунок 17. Процедура обработки события: нажатия кнопки «Рассчитать значения Y»

Расчетный лист Excel, имя которого используется в коде, имеет название PLExp_00.

```
Private Sub CommandClean_Click() 'очистка текстовых полей
    TextBoxX1.Value = ""
    TextBoxX2.Value = ""
    TextBoxX3.Value = ""
    TextBoxYprogn.Value = ""
End Sub
```

Рисунок 18. Процедура обработки события: нажатия кнопки «Очистить поля формы»

Проверим работу приложения. Переключимся на лист PLExp_00 и нажмем кнопку «Прогнозирование» (режим Конструктора должен быть отключен). В результате появится созданная форма. Заполним текстовые поля X1,X2,X3. Программа контролирует, чтобы задаваемые значения были корректными и принадлежали указанным диапазонам. Далее нажимаем кнопку рассчитать и получаем результат (Рисунок 19) $Y=6,88$.

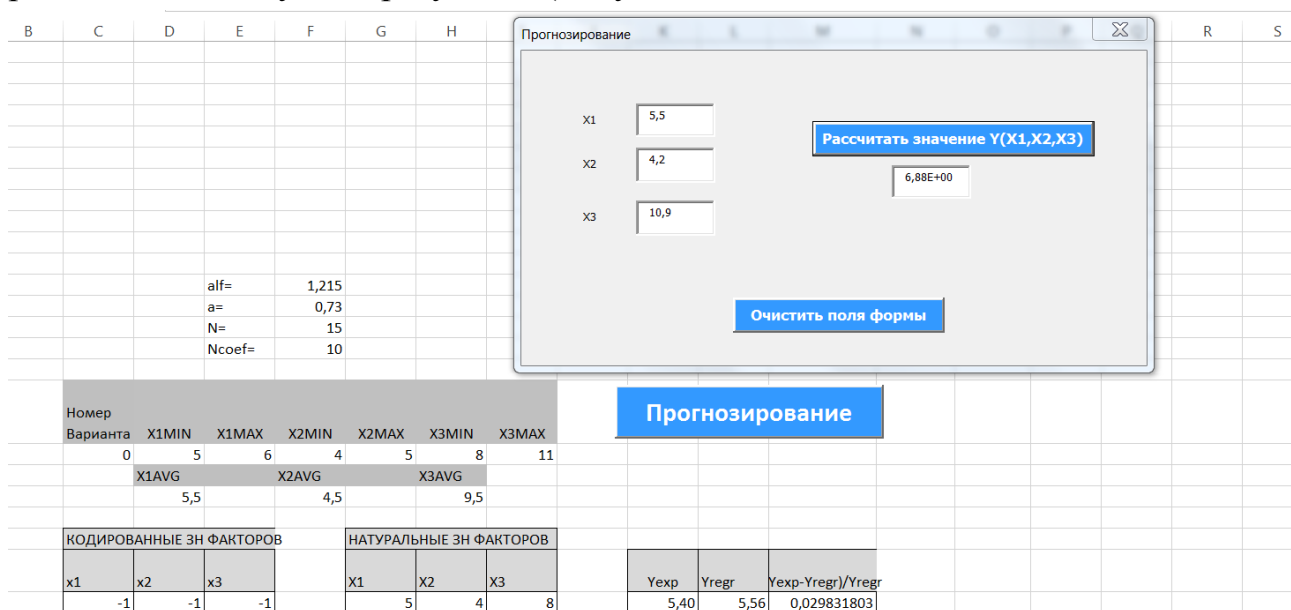


Рисунок 19

Для контроля работы приложения введите значения факторов, соответствующие используемым ранее точкам экспериментов. Результат должен совпадать с тем $Y_{regр}$, что рассчитано на листе (Рисунок 20). Найденное значение $Y=5,56$ совпало с рассчитанным ранее.

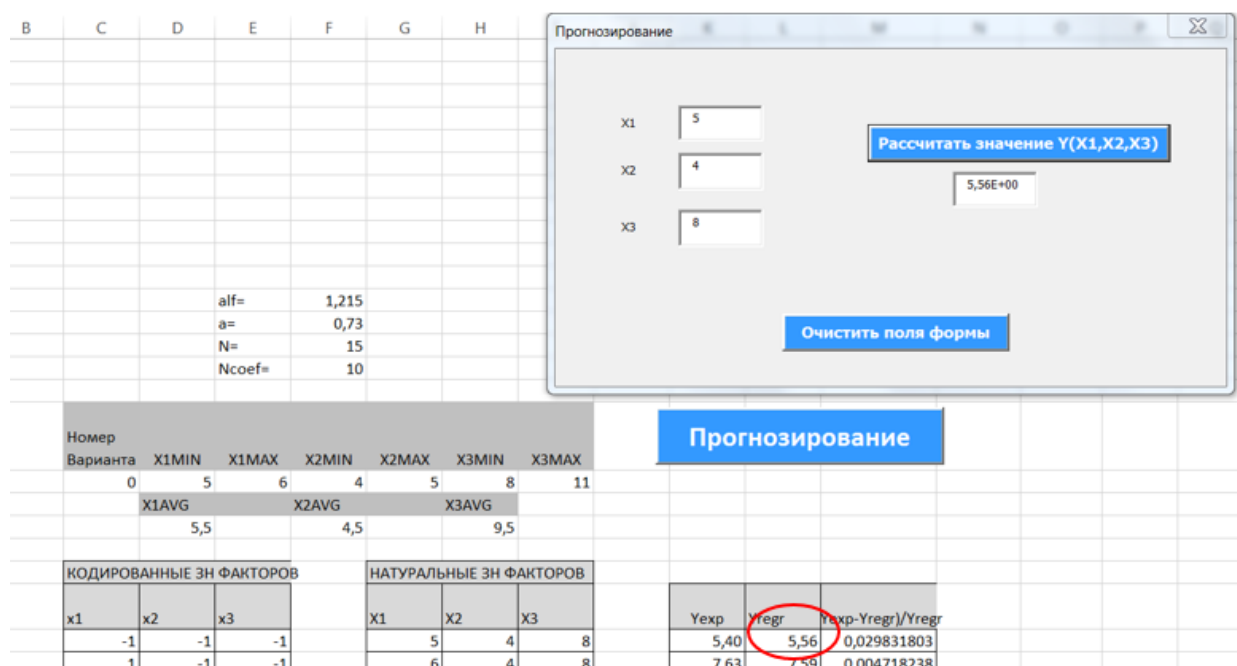


Рисунок 20

ЛИТЕРАТУРА

1. Статистический анализ и теория планирования эксперимента : учебное пособие / Н.И. Сидняев. – Москва : Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017.
2. Дубров, А. М. Многомерные статистические методы: учебник / А. М. Дубров А., В. С. Мхитарян, Л. И. Трошин Л.И. – М.: Финансы и статистика, 2011. – 349 с.
3. Основы программирования на Visual Basic и VBA в Excel 2007.–М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2008.–192 с.
4. Налимов, В. В. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов / В. В. Налимов, Н.А. Чернова. – М.: Наука, 1965. – 340 с.